mathimagie

unendlich-handlich-elementar

Mathematik in der IMAGINATA

Handbuch zur Ausstellung

Die Frage nach der Unendlichkeit fasziniert den menschlichen Geist. Mit dem Grenzenlosen und Unzählbaren beschäftigt sich die Mathematik wie kaum eine andere Wissenschaft. Das Wort „Mathematik“ leitet sich vom griechischen μανθάνω–*manthánō* „ich lerne“ ab. Lernen heißt, sich mit Vorstellungen auseinanderzusetzen, sie in Frage zu stellen und neu zu entwickeln. Lernen und Vorstellungsbildung haben immer mit eigenem Erfahren und Erleben zu tun – und so werden in dieser Ausstellung mathematische Themen „handlich“ gemacht, zum Anfassen, Ausprobieren und Begreifen. Ausgehend von ganz elementaren Fragestellungen, kann jeder Besucher selbst entscheiden, wie weit er den Weg hin zu komplexen mathematischen Problemen gehen möchte.

Die Stationen

Die Mathematik ist in verschiedene Teilgebiete gegliedert, z.B. Algebra, Mengenlehre oder Logik. Einige Gebiete überschneiden sich; und gerade in den Grenzbereichen liegen die interessantesten Forschungsgebiete. Allerdings sind nicht alle mathematischen Fragen und Inhalte einer anschaulichen und „handlichen“ Darstellung gleichermaßen zugänglich, so dass in dieser Ausstellung nur ausgewählte Teilgebiete der Mathematik vertreten sind.
Die Stationen 1–6 sind der Geometrie gewidmet. Sie befassen sich mit Fragestellungen zur Ähnlichkeit und Zerlegung von Flächen oder Körpern. Die Stationen 7–12 geben eine erste Einführung in die Themen Zahlentheorie, Kryptologie, Topologie und Statistik. Eröffnet wurde die Ausstellung im „Jahr der Mathematik“ 2008. Aufgrund der guten Resonanz wird mittlerweile jährlich um weitere Stationen ergänzt, die verschiedene geometrische und zahlentheoretische Fragen aufgreifen.

Station 01: Vier mal ähnlich

4 kongruente, rechtwinklige Dreiecke

4 kongruente Trapeze

4 kongruente rechtwinklige Trapeze

4 konkave Sechsecke

Aus vier einander kongruenten Flächen soll eine große, ähnliche Figur gelegt werden. Diese Fragestellung ist hier für 2 verschiedene Trapeze, ein Dreieck und ein konkaves Sechseck dargestellt[1].

ähnlich:
Zwei Figuren sind zueinander ähnlich, wenn sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung (eine geometrische Abbildung, die sich aus zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen zusammensetzen lässt) ineinander überführt werden können.
kongruent:
Zwei Flächen sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführt, d.h. zur Deckung gebracht werden können. Kongruenzabbildungen (auch Bewegungen genannt) sind Parallelverschiebung, Drehung, Spiegelung und die Verknüpfungen dieser Abbildungen.

Winkel und Streckenverhältnisse stimmen in ähnlichen Figuren überein. Kongruente Figuren sind stets ähnlich. Das Umgekehrte ist im Allgemeinen falsch: Ähnliche Figuren können verschieden groß sein.

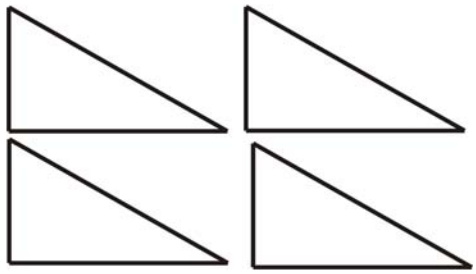


Bild 1: rechtwinklige Dreiecke

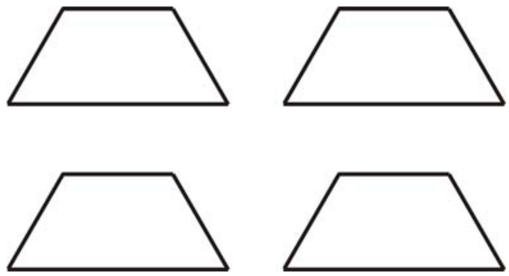


Bild 2: Trapeze

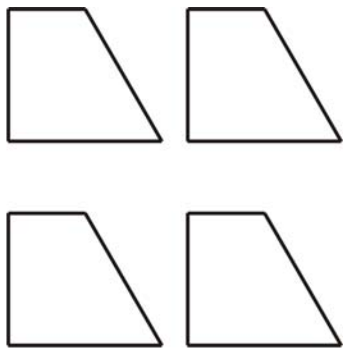


Bild 3: rechtwinklige Trapeze

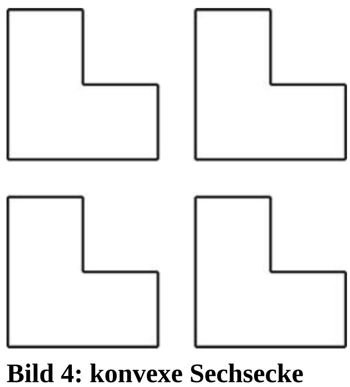


Bild 4: konvexe Sechsecke

[1] Die gleiche Aufgabe kann z.B. auch für Parallelogramme oder andere Dreiecke gestellt werden.

Man kann solche Puzzle-Aufgaben auch als Zerlegung einer großen Figur in kleinere, kongruente Teile betrachten, wobei die Teile ähnlich zur Gesamtfigur sein sollen. Wenn die große Figur in lediglich vier (= 2^2) kongruente Teile zerlegt werden soll, so sind die zwei Trapeze (zusammen mit einem weiteren) die einzigen derartigen Zerlegungen von konvexen Vierecken, die keine Parallelogramme sind.

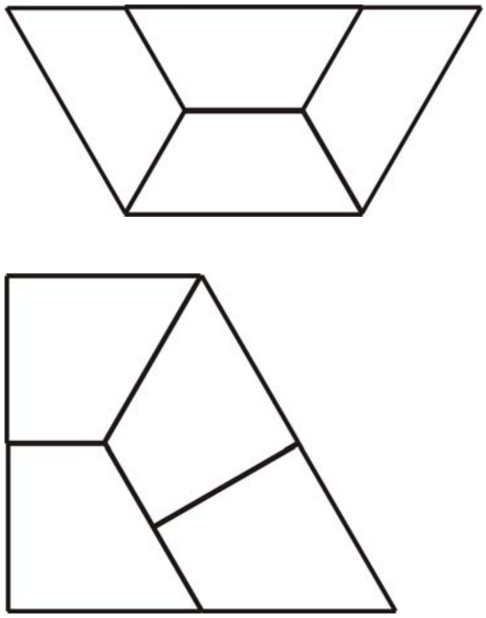


Bild 5: Zerlegung der zwei Trapeze in vier kongruente Teile, die ähnlich zur Gesamtfigur sind.

Das Dreieck ist speziell gewählt, weil es die vier gezeigten möglichen Arten von Zerlegungen hat. Die im Bild 6 dargestellte Zerlegung existiert (über die jeweiligen Seitenmitten) für jedes Dreieck.

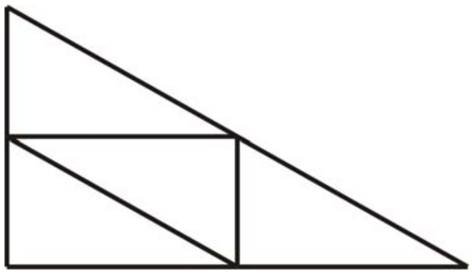


Bild 6: Dreieck aus 4 kongruenten Dreiecken

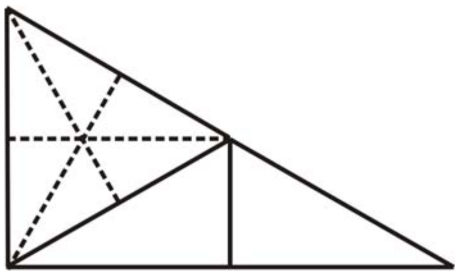


Bild 7: Drei weitere Lösungen

Das konkave Viereck ist in vielen Rätselbüchern enthalten und sollte somit einigen Besuchern auch bekannt sein.

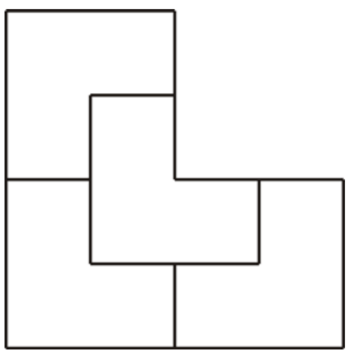


Bild 8: Lösung für konvexes Sechseck

Station 02:
Ähnlich gebaut

8 konkave Elemente mit quadratischer Grundfläche

8 konvexe Elemente mit dreieckiger Grundfläche

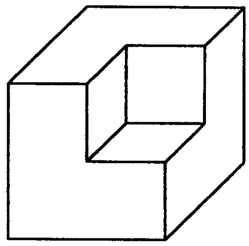


Bild 9: konkaves Grundelement

konvex
Als konvex bezeichnet man Formen (Körper, Flächenteile, Linien), die nach außen gewölbt sind. Die Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten der Form liegt immer innerhalb der Form.
konkav
Als konkav bezeichnet man Formen (Körper, Flächenteile, Linien), die nach innen gewölbt sind. Die Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten der Form kann auch außerhalb der Form liegen.

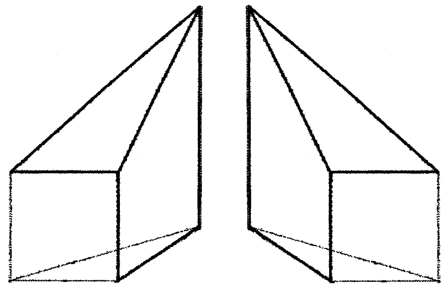


Bild 10: 2 Typen konvexer Grundelemente

Aus den konkaven Sechsecken und den Trapezen von Station 01 lassen sich „räumliche Verallgemeinerungen“ mit gleicher Aufgabenstellung gestalten: Aus kleinen Elementen soll ein großer, ähnlicher Körper gebaut werden.
Bei dem konkaven Körper sind alle acht sesselförmigen Grundelemente einander gleich. Auch der konvexe Körper wird in acht (= 2^3) dazu ähnliche Elemente zerlegt. Dabei tritt als Besonderheit auf, dass es zwei Typen gibt, die sich durch eine Ebenenspiegelung unterscheiden. Beim Zusammensetzen dieser Elemente zum Gesamtkörper benötigt man nun jeweils sechs Teile des einen Typs und zwei des anderen.

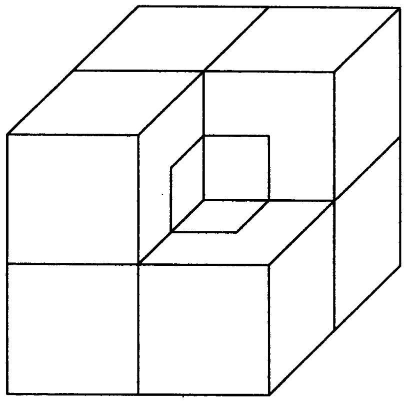


Bild 11: konkaver Körper

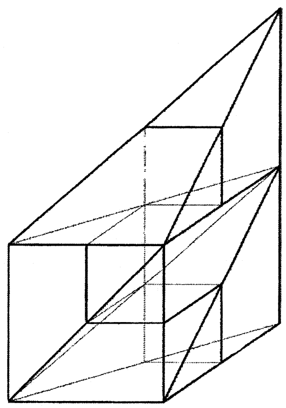
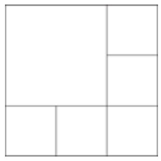


Bild 12: konvexer Körper aus acht Elementen



Station 03:
Ähnliches aus Ähnlichem

5 gleichschenklige Dreiecke

3 rechtwinklige Trapeze

5 Drachenvierecke

9 grüne Quadrate

(Verhältnis 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)

13 gelbe Quadrate

(Verhältnis 12, 11, 11, 7, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)

Auch hier soll aus Grundelementen eine große, ähnliche Figur gelegt werden. Allerdings sind hier nicht alle Elemente – wie bei Station 01– kongruent, aber immer einander ähnlich. Ausgewählt wurden einige Vielecke, die vor allem kleine Zerlegungszahlen haben.

Zerlegungszahl, Minimalzahl
Als Zerlegungszahl wird die Anzahl der Elemente bezeichnet, in die eine Figur zerlegt werden kann.

Die Minimalzahl ist die kleinstmögliche Zerlegungszahl.

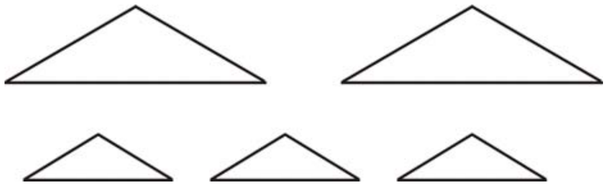


Bild 13:gleichschenklige Dreiecke

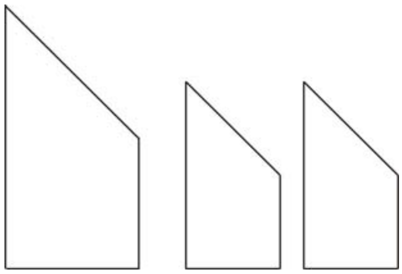


Bild 14: rechtwinklige Trapeze

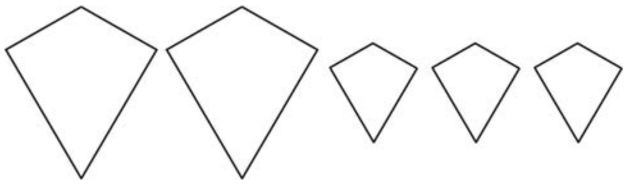


Bild 15: Drachenvierecke

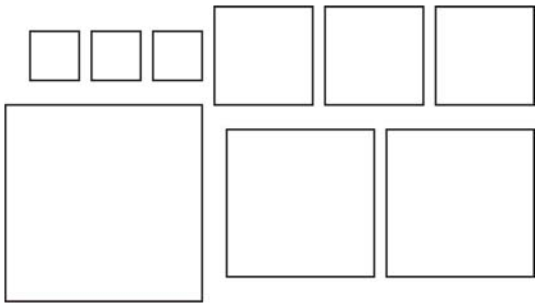


Bild 16: 9 grüne Quadrate

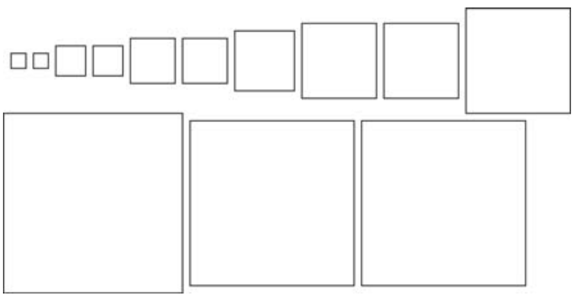


Bild 17: 13 gelbe Quadrate

Das Dreieck ist sehr bemerkenswert. Lässt man die rechtwinkligen Dreiecke außer Acht[2], so ist das hier vorhandene gleichschenklige Dreieck mit Basiswinkel 30° das einzige (!) Dreieck, das sich in fünf dazu ähnliche Teile zerlegen lässt.

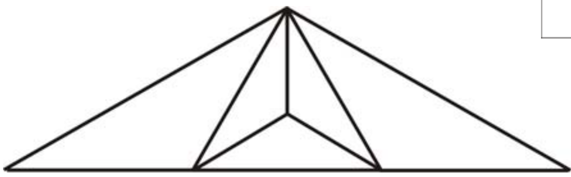


Bild 18: Gleichschenkliges Dreieck aus fünf ähnlichen Elementen

Das rechtwinklige Trapez wird aus nur drei einander ähnlichen Elementen zusammengelegt und hat damit die kleinste Zerlegungszahl aller hier aufgeführten Figuren.

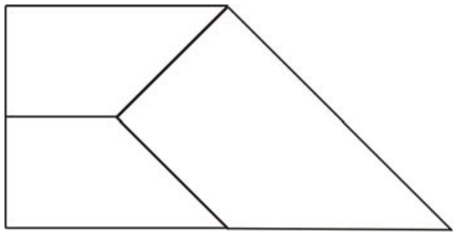


Bild 19: rechtwinkliges Trapez aus drei ähnlichen Elementen

Das Drachenviereck beinhaltet auch ein gleichseitiges Dreieck, welches sich in drei kongruente Drachenvierecke zerlegen lässt. Im gleichschenkligen Dreieck von oben war dies eine Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks in zwei kongruente Dreiecke.

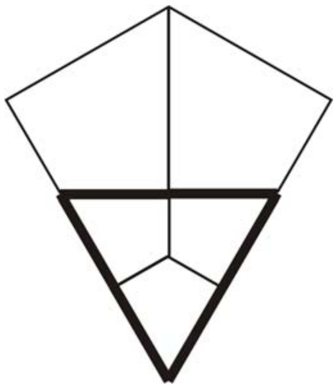


Bild 20: Drachenviereck aus fünf ähnlichen Elementen, darin ein gleichseitiges Dreieck

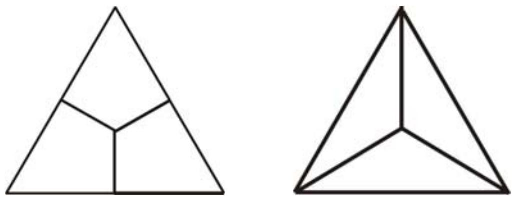


Bild 21: Gleichseitiges Dreieck in drei kongruente Drachenvierecke oder drei kongruente Dreiecke zerlegt

[2] Rechtwinklige Dreiecke zerfallen nach Zerlegung durch Höhen auf die Hypotenusen wieder in ähnliche Dreiecke, und sind folglich immer in fünf Teile zerlegbar.

Die Quadratzerlegungen sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, da sicher die obere Zerlegung (grünes Puzzle) leichter zu finden ist. Gemeinsam ist beiden Zerlegungen, dass es sich jeweils um die kleinsten Anzahlen von Teilen handelt, wenn man die maximale Anzahl von gleichen Teilen in der Zerlegung betrachtet. Für maximal drei gleiche Quadrate ist diese Minimalzahl 9 und für maximal zwei gleiche Quadrate ist sie (wie hier dargestellt) 13.

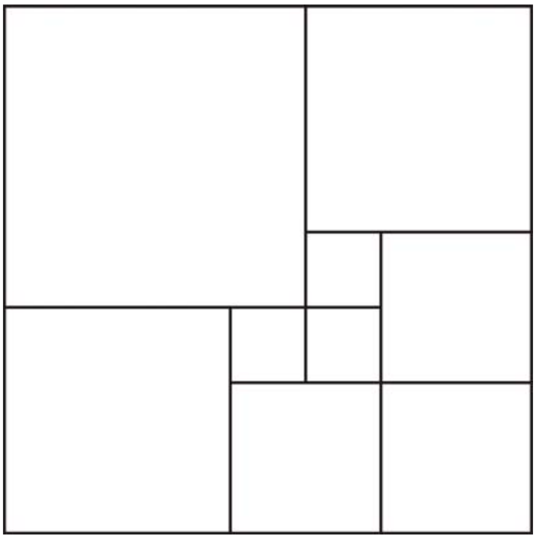


Bild 22: grünes Quadrat
(drei gleiche Elemente)

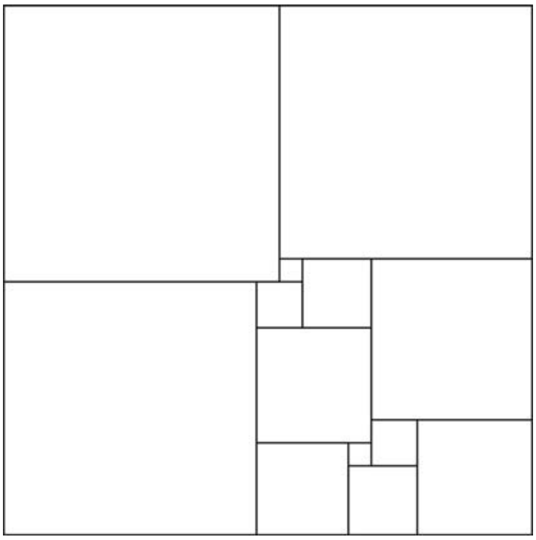


Bild 23: gelbes Quadrat
(zwei gleiche Elemente)

Station 04:
Quadriertes Rechteck

9 purpurfarbene Quadrate

Verhältnis (6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 1, 1)

Aus einander ähnlichen Elementen, nämlich Quadraten unterschiedlicher Größe, soll ein Rechteck gelegt werden. Dabei kommt jedes Element maximal doppelt vor.
Im Gegensatz zu den Stationen 01-03 ist hier die Gesamtfigur also nicht mehr ähnlich zu den einzelnen Elementen.

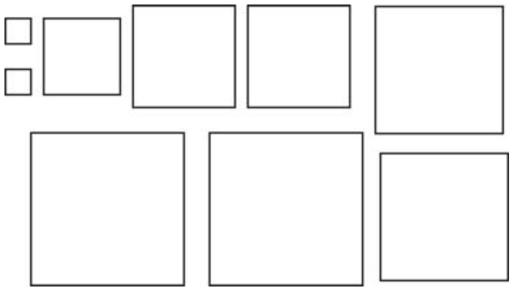


Bild 24: 9 purpurfarbene Quadrate

Die Lösung – eine zentral-symmetrische Zerlegung eines Rechteckes in Quadrate- zeichnet sich durch Symmetrie, Einfachheit und damit Eleganz aus.

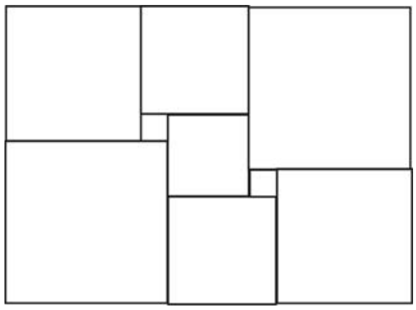


Bild 25: Rechteck aus 9 Quadraten

Station 05:
Paarweise verschieden

9 blaue Quadrate (Verhältnis 36, 33, 28, 25, 16, 9, 7, 5, 2)

9 hellbraune Quadrate (Verhältnis 18, 15, 14, 10, 9, 8, 7, 4, 1)

Aus neun Quadraten, die paarweise verschieden sind, soll ein Rechteck gelegt werden.

> ***Paarweise verschieden***
> *Mathematische Objekte heißen genau dann paarweise verschieden, wenn keine zwei von ihnen gleich sind.*

Wie schon bei Station IV sind die Teilelemente also nicht ähnlich zur Gesamtfigur. Für eine Rechteckzerlegung in paarweise verschiedene Quadrate ist die Zahl 9 die Minimalzahl und es existieren auch genau zwei solche Zerlegungen. Werden zehn Quadrate benutzt, so gibt es bereits sechs Lösungen, für elf Teilquadrate 22. Ein schönes Bild dazu (mit elf Teilquadraten) zeigt eine Briefmarke der Deutschen Post aus dem Jahr 1998 aus Anlass des Internationalen Mathematikerkongresses in Berlin.

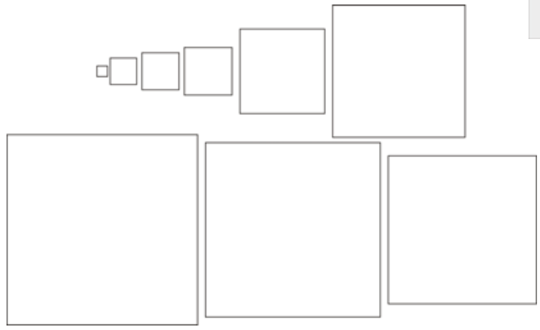


Bild 26: 9 blaue Quadrate

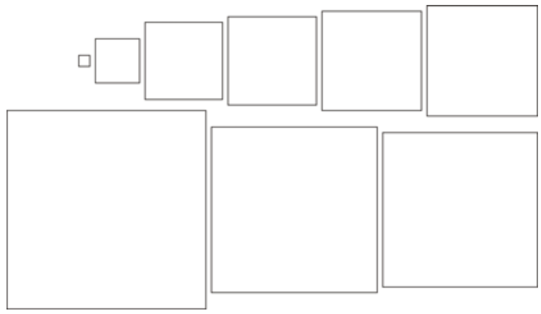


Bild 27: 9 hellbraune Quadrate

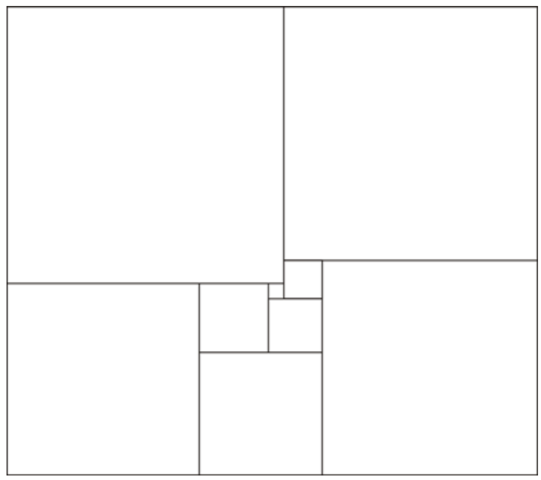


Bild 28: Blaue Quadrate zum Rechteck gelegt

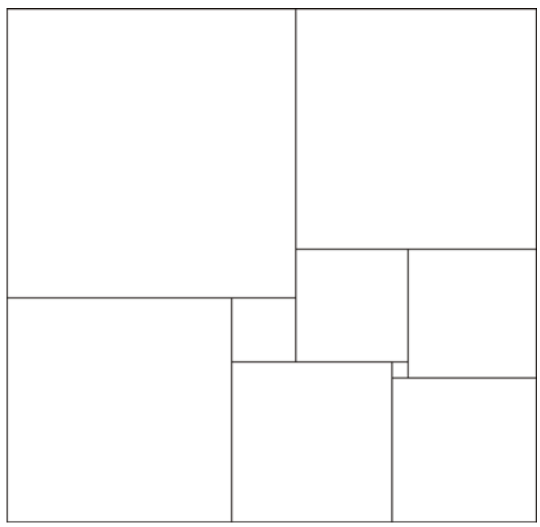


Bild 29: Hellbraune Quadrate zum Rechteck gelegt.

Station 06:
Perfekte Zerlegungen

21 weiße Quadrate

8 Rechtecke

Aus Elementen, die paarweise verschieden sind, soll eine große, ähnliche Figur gelegt werden. Als Beispiel sind hier die Flächenzerlegung für Quadrat und Rechteck aufgeführt.

Perfekte Zerlegung
Zerlegung einer Figur in ähnliche Elemente, die alle paarweise verschieden sind.

Diese Aufgabe ist eine Weiterführung der Stationen 03 und 05, d.h. die Elemente sollen einander ähnlich und ähnlich zur Gesamtfigur sein (wie bei Station 03), und gleichzeitig paarweise verschieden (wie bei Station 05).

Die Suche nach Rechtecken, die in paarweise verschiedene Quadrate zerlegt sind, führte zu der Frage, ob und mit welcher Minimalzahl ein Quadrat in inkongruente Quadrate zerlegbar ist. 1939 veröffentlichte ein deutscher Mathematiker als erster ein solches – so genanntes perfektes – Quadrat der Ordnung 55, also ein Quadrat, das in 55 kleinere und paarweise verschiedene Quadrate zerlegt ist. 1948 wurde eine perfekte Quadratzerlegung der Ordnung 24 präsentiert, was lange Zeit auch die Minimalzahl blieb.

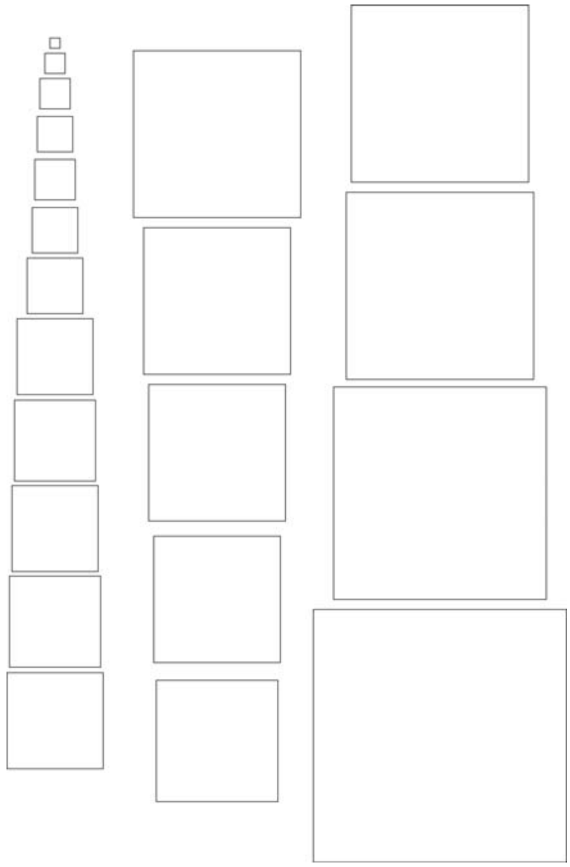


Bild 30: 21 weiße Quadrate für die „perfekte Zerlegung“

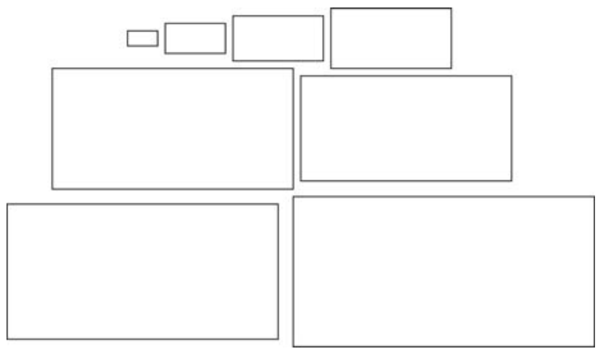


Bild 31: 8 Rechtecke für die „perfekte Zerlegung“

Für Rechtecke bis Ordnung 15 war unter den 2609 existierenden Rechtecken die „quadratnächste“ Rechteckzerlegung ein Rechteck der Seitenlängen 1698 und 1699. Bis zur Ordnung 18, für die es 110 384 verschiedene Rechteckzerlegungen gibt, findet sich immer noch kein Quadrat. Auch bis zur Ordnung 20 wurde man nicht fündig. Erst bei Ordnung 21 fand man genau eine perfekte Zerlegung. Diese wird hier präsentiert.

Streckt man die perfekte Quadratzerlegung in eine Richtung senkrecht zu einer Seite, so findet man für jedes Rechteckverhältnis 1: k (k eine positive reelle Zahl) eine perfekte Zerlegung, da alle Teile sich gleichmäßig verändern und somit untereinander ähnlich bleiben. Die Minimalzahl wird allerdings im Allgemeinen nicht 21 lauten, da horizontale und vertikale Lagen der Teile möglich sind.

Die acht nicht kongruenten aber ähnlichen Rechtecke können zu einem Rechteck zusammengefügt werden, das ähnlich zu den Teilen ist. Man kann beweisen, dass es sich für dieses spezielle Rechteck („Doppelquadrat“) mit der Anzahl 8 auch um die Minimalzahl handelt.

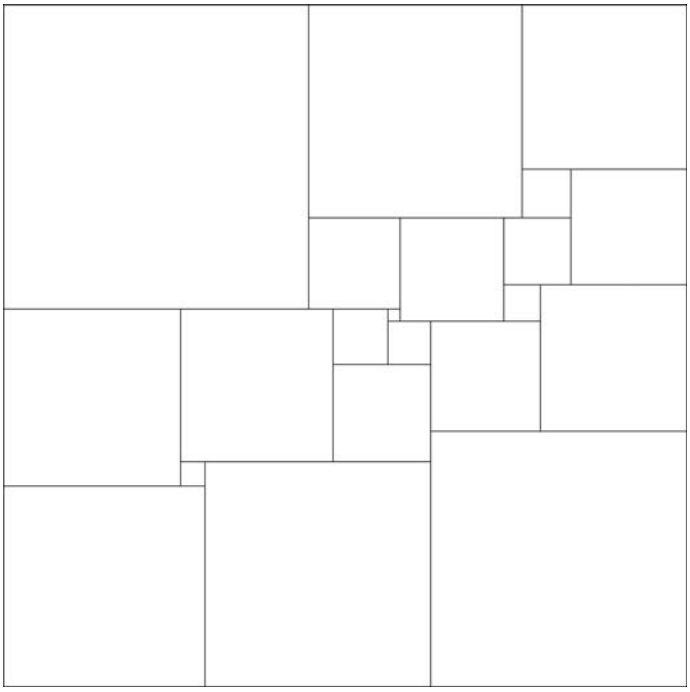


Bild 32: Perfekte Zerlegung eines Quadrates in 21 Elemente

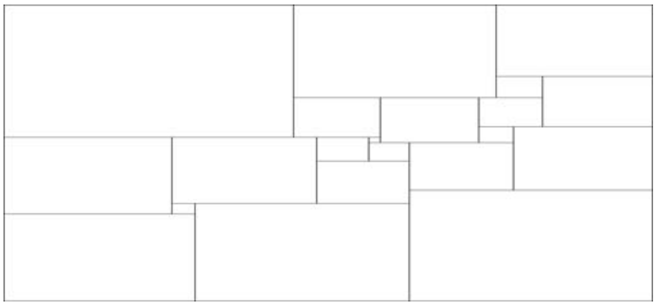


Bild 33: Streckung der perfekten Quadratzerlegung

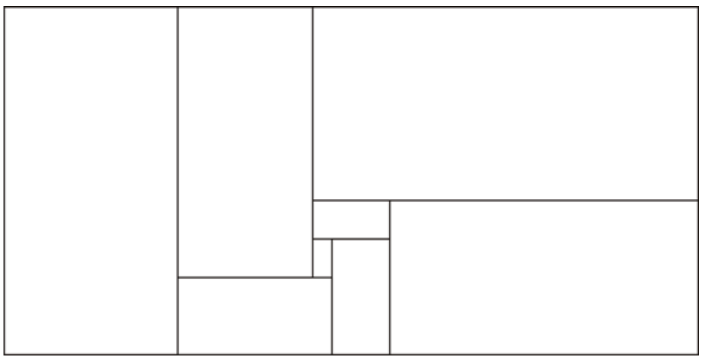


Bild 34: Perfekte Zerlegung eines Rechteckes in acht Elemente

Die hier aufgeführten Stationen sind Ausgangspunkt für viele weitere Fragen, z.B.
Welche perfekten Zerlegungen anderer Figuren, z.B. von Dreiecken oder Nichtparallelogrammen existieren?
Welche Minimalzahlen existieren für perfekte Zerlegungen z.B. bei Rechtecken?

Weiterführende Literatur:

E. Hertel;
Beiträge zur Algebra und Geometrie, Vol. 41 (2000), Nr.2, 589-595

E. Hertel;
Romanian Journal of pure an applied mathematics, 50 (2005), Nr. 5-6, 647-655

E. Hertel,
Vortrag zur ÖMG-DMV-Tagung 2005, Klagenfurt

G. Valette, T. Zamfirescu,
Journal of Combinational Theory (B), 16 (1974), 1-16

C. Müller,
Elemente der Mathematik, Vol 45/4 (1990) 98-106

I. Agricola, T. Friedrich,
Elementargeometrie, Vieweg 2005

Station 07: Sieb des Eratosthenes

Zahlentafel mit Zahlen von 1-36

Aus den Zahlen 1 bis 36 sollen jeweils die Vielfachen von 2, 3, 4, 5, … aussortiert werden. Bestimmte Zahlen bleiben dabei übrig. Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, … nennt man natürliche Zahlen.
Das Produkt zweier solcher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl. Sortiert man aus den natürlichen Zahlen alle Vielfachen von 2, 3, 4, 5,…, aus, bleiben Zahlen „im Sieb hängen". Diese „übrig gebliebenen" Zahlen nennt man Primzahlen. Sie haben genau zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst.

> **Primzahl:**
> Eine natürliche Zahl p heißt Primzahl, wenn sie genau zwei positive Teiler hat.

Eine natürliche Zahl ist also entweder eine zusammengesetzte Zahl (d.h. das Produkt zweier natürlicher Zahlen, die größer sind als 1) oder eine Primzahl.
Die 1 nimmt eine Sonderstellung ein, da sie weder Primzahl noch zusammengesetzt ist. Die Folge der Primzahlen beginnt mit 2, 3, 5, 7,… .

Primzahlen haben in der Zahlentheorie, in der Geometrie und in der Kryptologie eine sehr große Bedeutung. So erfolgt z.B. das Verschlüsseln sensibler Informationen u. a. mit dem sog. RSA[3]-Algorithmus. Die Sicherheit dieses Verfahrens beruht darauf, dass man zurzeit kein genügend effektives Verfahren kennt, um aus einem Produkt von zwei Primzahlen die Faktoren zu ermitteln. So ist schnell zu erkennen, dass 21 das Produkt der Primzahlen 3 und 7 ist, was aber ist etwa mit der Zahl1 050 504 368 559 379? Man muss schon lange rechnen, um auf die Faktoren 18 712 789 und 56 138 311 zu kommen. Je größer die verwendeten Primzahlen desto höher der Rechenaufwand. Derzeit werden Primzahlen mit mehreren hundert Stellen verwendet, z.B. für E-Mail-Verschlüsselung oder Internet- und Telefonie-Infrastruktur.

Weiterführende Literatur:

A. Bartholome, J. Rung, H. Kern
Zahlentheorie für Einsteiger, Vieweg 2006

K. Reiss, G. Schmieder
Basiswissen Zahlentheorie, Springer 2007

R. Remmert, P. Ullrich
Elementare Zahlentheorie, Birkhäuser Verlag 2008

---

[3] Nach den Erfindern dieses Verfahrens Rivest, Shamir, Adleman

Station 08: Vollkommene Zahlen

Kreissegmente verschiedener Größe (1/2, 1/3, ...1/10, 1/14, 1/28)

Aus Kreissegmenten verschiedener Größe soll eine Kreisfläche gelegt werden. Interessant sind dabei vor allem solche Lösungen, bei denen jedes Segment nur einmal vorkommt. Mit den hier vorgegebenen Kreissegmenten sind zwei solcher Lösungen möglich, nämlich:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

und

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=1$$

Wir können uns diese Zahlen nun genauer betrachten. Die Zahl 6 ist genau die Summe der übrigen Nenner:

1 + 2 + 3 = 6

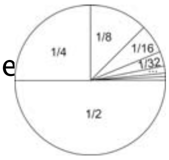
Darüber hinaus sind 1, 2, 3, 6 auch gleichzeitig alle Teiler von 6.

Gleiches gilt für die Zahl 28:

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28

1, 2, 4, 7, 14, 28 sind alle Teiler von 28.

Teiler:
Eine natürliche Zahl t heißt Teiler der natürlichen Zahl n, wenn es eine natürliche Zahl d gibt, so dass $t \cdot d = n$ gilt.
Die Zahlen t = 1 und t = n nennt man triviale (leicht ersichtliche) Teiler der Zahl n.
Zum Beispiel hat die Zahl n = 12 die Teiler t: 1, 2, 3, 4, 6 und 12.
Die trivialen Teiler sind t = 1 und t = 12.



In der Zahlentheorie hat die Summe der Teiler eine große Bedeutung. Hierbei können die drei Fälle eintreten, dass die Teilersumme S kleiner, gleich oder größer als $2 \cdot n$ sein kann. Im Speziellen wird nun der Fall $S = 2 \cdot n$ betrachtet.

Vollkommene Zahl:
Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen (perfekt), wenn für die Teilersumme S die Eigenschaft

$S = 2 \cdot n$ gilt.

Ist $S < 2 \cdot n$,
so ist n eine arme (defiziente) Zahl.

Ist $S > 2 \cdot n$,
so ist n eine reiche (abundante) Zahl.

Für unsere Beispiele gilt:

$1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$ und

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$

6 und 28 sind vollkommene Zahlen; die nächst folgenden sind 496 und 8128. Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, dass diese Zahlen bereits in der Antike bekannt waren.

Wenn man von den Teilern dieser vollkommenen Zahlen die zugehörigen Kehrwerte (Stammbrüche) bildet, so nimmt ihre Summe genau den Zahlenwert 2 an. Folglich haben wir ausgehend von den beiden ersten vollkommenen Zahlen 6 beziehungsweise 28 die möglichen Zerlegungen der Kreisfläche in ein Ganzes.

Station 09: Caesarscheibe

2 gegeneinander drehbar gelagerte Scheiben,
jeweils mit den Buchstaben A – Z

Mit der Caesarscheibe können Texte verschlüsselt werden. Dazu wird der zu verschlüsselnde Buchstabe (Klartext) auf der äußeren Scheibe gesucht und der auf der inneren Scheibe darunter stehende Buchstabe (Geheimtext) aufgeschrieben.
Zum Entschlüsseln braucht man nur den Buchstaben des Geheimtextes auf der inneren Scheibe suchen. Der darüber stehende Buchstabe ergibt den entschlüsselten Klartext.
Um das zu können, benötigt man den so genannten Schlüssel. So nennt man die Information, wie der Absender die Buchstaben verändert hat.

Kryptologie:
Wissenschaft von der Verschlüsselung von Informationen
Schlüssel:
Als Schlüssel wird in der Kryptologie die Information bezeichnet, die benötigt wird, um einen Klartext zu verschlüsseln und somit einen Geheimtext zu erhalten.
Code:
Ein Code ist eine Vorschrift oder Verfahren, um Nachrichten oder Befehle zur Übertragung oder Weiterverarbeitung für ein Zielsystem umzuwandeln (z.B. Morsecode).

Der römische Feldherr und Staatsmann G. Iulius Caesar (100 – 44 v. Chr.) soll einer der ersten gewesen sein, der die Technik der Kryptologie angewendet hat. Er übermittelte vertrauliche Briefe, indem er sie in Geheimschrift schrieb, d. h. chiffrierte. Wenn jemand den Text lesen wollte, so musste er diesen entziffern – dechiffrieren. Der Schlüssel war allerdings nur Cäsar und dem Empfänger des Briefes bekannt. Auf diese Weise konnte keiner den Brief lesen, außer der, an den er gerichtet war. Cäsar benutzte den Schlüssel „3“, d. h. er setzte für den ersten Buchstaben des Alphabets – A– den vierten –d– ein. Somit verschob er sein Geheimtextalphabet um drei Stellen. Damit die Verschlüsselung schneller ging, benutzte er die Caesar-Scheibe. Er verschob das „A“, welches auf dem äußeren Ring stand, auf das „d“ des inneren Rings, so dass alle Buchstaben des Alphabets um drei Stellen verschoben waren.
Es gibt keinen Grund, warum Cäsar das Geheimtextalphabet gerade um drei Stellen verschoben hat. Man kann das Alphabet um eine beliebige Anzahl von Stellen verschieben. Sender und Empfänger müssen nur den Schlüssel wissen, d. h. um wie viele Stellen das Geheimtextalphabet verschoben wurde.

Die modifizierte Caesar-Scheibe

Bei dieser Scheibe ist die Anordnung der Buchstaben des Geheimtextalphabets verändert.
Dabei wurden die Buchstaben des Alphabets durchnummeriert, also A wird die 1 zugeordnet, B die 2 und schließlich Z die 26. Diese Zahlen wurden mit 11 multipliziert und dann durch 26, der Anzahl der Buchstaben des Alphabets, geteilt. Der Rest, der bei der Division übrigblieb, stand für die Zahl des Buchstabens des Geheimtextalphabets.
Die Zahlen kann man mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, solange dieser teilerfremd zu 26 ist.
Das Verfahren der Entschlüsselung ist identisch mit dem Verfahren der originalen Caesar-Scheibe.

Weiterführende Literatur:

A. Beutelspacher,
Kryptologie, Vieweg 2007

Station 10: Vierfarbenproblem

Thüringenpuzzle mit Landkreisen in den Farben rot, blau, gelb, grün

Erinnern wir uns an die im Geographie-Unterricht verwendetet farbigen Landkarten im Schulatlas. Dabei sei an die politischen Karten mit der Einteilung in verschiedene Länder gedacht, die unterschiedliche Farben haben. Der Zweck der Verwendung von Farben ist, dass man die Länder unterscheiden kann. Dabei kommt es darauf an, dass die Gebiete, die eine gemeinsame Grenze haben verschieden gefärbt sind. Man könnte nun für jedes Land eine verschiedene Farbe nehmen. Aber eigentlich sind so viele Farben doch eine Verschwendung…

Nun stellt sich die Frage, wie viele Farben mindestens notwendig sind, dass je zwei Länder, die ein Stück Grenze gemeinsam haben, verschieden gefärbt sind.

Probiert dieses an der Karte von Thüringen aus. Dabei sollt ihr die einzelnen Landkreise, die alle in den Farben rot, blau, gelb und grün vorhanden sind, so in die Landkarte von Thüringen einsetzen, dass ihr so wenige unterschiedliche Farben verwendet. Allerdings müssen die Länder, die aneinander grenzen verschiedene Farben haben.

Eine von vielen Lösungen ist hier dargestellt.

Das Färben mit vier Farben kann man auf alle Landkarten übertragen. Probiert es doch mal mit der Deutschland- oder mit der Europakarte aus.

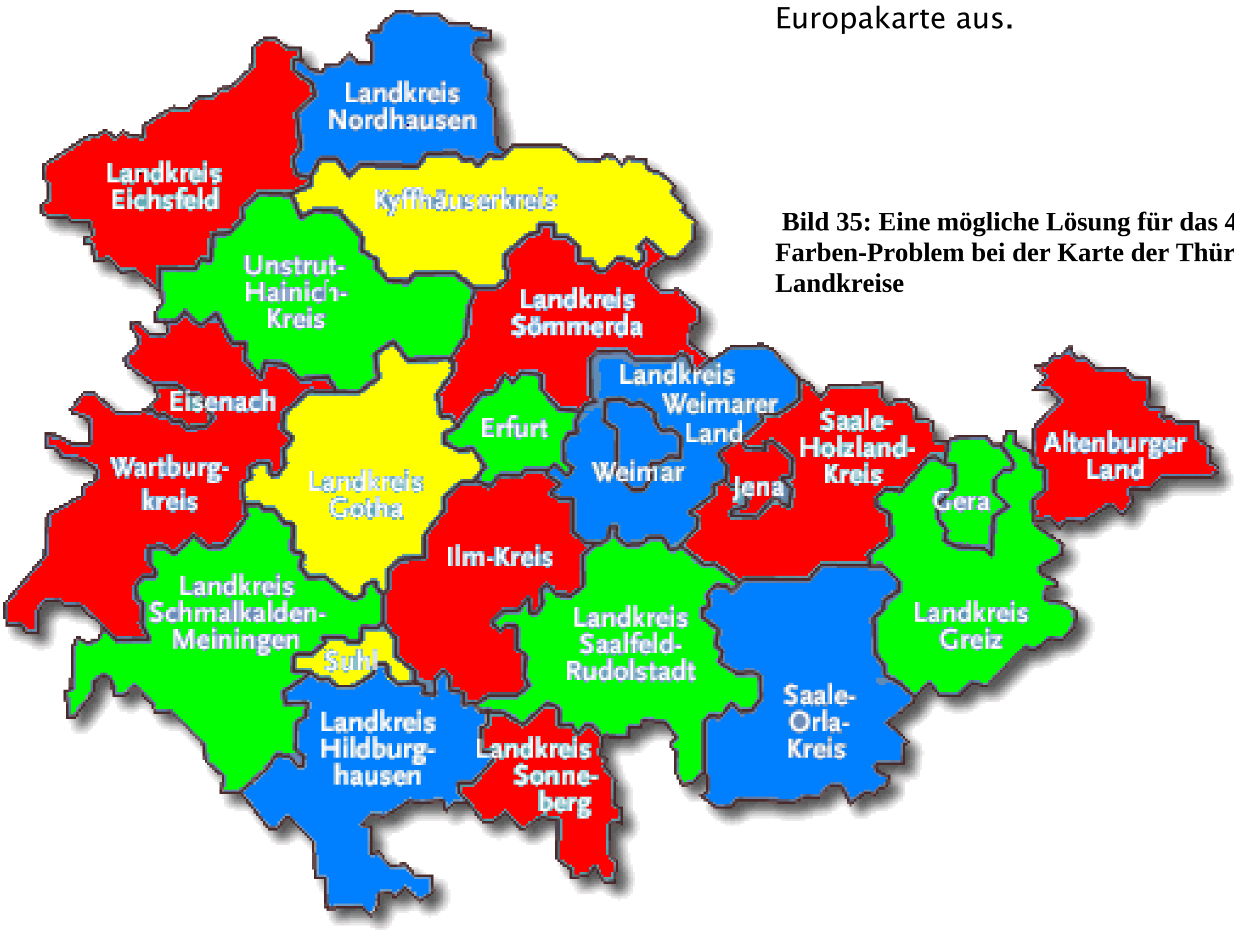


Bild 35: Eine mögliche Lösung für das 4-Farben-Problem bei der Karte der Thüringer Landkreise

Dieses Problem lässt sich zu einem Satz verallgemeinern:

Vier-Farben-Satz:
Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben, so dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

Der Satz geht auf Percy Heawood zurück. Dieser entdeckte in dem von Alfred Kempe 1879 veröffentlichten und zunächst als korrekt erachteten Beweis des Vier-Farben-Satzes einen zur damaligen Zeit irreparablen Fehler und bewies daraufhin im Jahre 1890 mit elementaren Mitteln den Fünf-Farben-Satz.

Fünf-Farben-Satz:
Jede Landkarte lässt sich mit fünf Farben färben, so dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

Der Beweis des Vier-Farben-Satzes ist äußerst schwer und wurde erst 1977, 125 Jahre, nachdem die Vermutung aufgestellt worden war, bewiesen, und auch dieser Beweis war umstritten: Er baute zum Großteil auf den Rechnungen eines Computers auf, die man per Hand nicht nachvollziehen konnte.
Der Vier-Farben-Satz gilt bis heute als mathematisch unbewiesen.

Weiterführende Literatur:

P. Basieux,
Top Seven der mathematischen Vermutungen, Rowohlt 2004
H.-G. Bigalke, H. Heesch
Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung, Birkhäuser 1988
R. Fritsch, G. Fritsch,
Der Vierfarbensatz: Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee
BI-Wissenschaftsverlag 1994

Station 11: Knotentheorie

Die Station 11 befasst sich mit einem relativ jungen Zweig der Mathematik, der Knotentheorie.

Knoten:
Ein Stück Seil oder Schnur ohne lose Enden, das durch Ziehen nicht in einen Kreis (Unknoten) verwandelt werden kann.

Der einfachste Knoten in der Mathematik ist der Kleeblattknoten mit 3 Überkreuzungen. Danach folgt der Achterknoten mit 4 Überkreuzungen.
Früher löste man Knotenprobleme wie beispielsweise die Frage, ob zwei Knoten gleich sind oder nicht, praktisch. Heute nutzen viele den Computer.

Gleichheit zweier Knoten:
Zwei Knoten sind gleich, wenn man den einen in den anderen durch elementare Umformungen verändern kann.

Der linksgeknotete Kleeblattknoten und der rechtsgeknotete Kleeblattknoten sind Beispiele für Knoten, die nicht gleich sind. Aus dem links geknoteten Exemplar kann kein rechts geknotetes gemacht werden und umgekehrt.

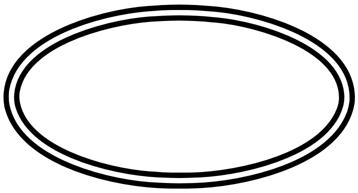


Bild 36: Der Unknoten

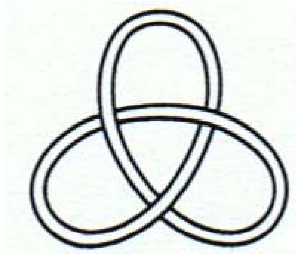


Bild 37: Kleeblattknoten

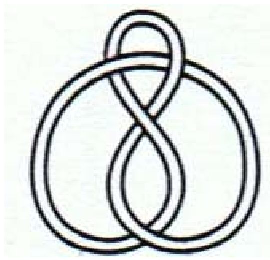


Bild 38: Achterknoten

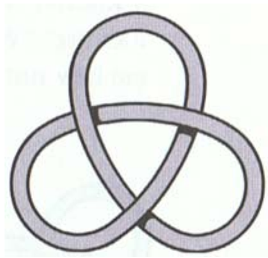


Bild 39: links geknoteter Kleeblattknoten

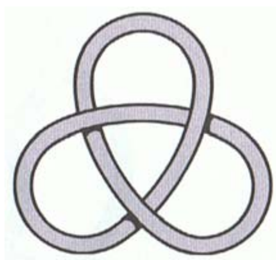


Bild 40: rechts geknoteter Kleeblattknoten

Lösungen zu den einzelnen Aufgaben:

Blatt 2: *Knoten oder Unknoten?*

-1- Unknoten

-2- Unknoten

-3- Kleeblattknoten

-4- Kleeblattknoten

Blatt 6: *Knoten oder kompliziert gelegt?*

-1- Knoten mit mindestens 9 Kreuzungen

-2- Unknoten

-3- Knoten mit mindestens 7 Kreuzungen

-4- Kleeblattknoten

Weiterführende Literatur:

C.C. Adams. Das Knotenbuch. Spektrum 1995.

C. Livingston. Knotentheorie für Einsteiger. Vieweg 1995.

Station 12: Starke Würfel

3 helle Holzürfel

4 dunkle Holzwürfel

Zwei Spieler wählen je einen gleichfarbigen Würfel (also entweder zwei dunkle oder zwei helle) und würfeln gegeneinander. In einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen – wenigstens 40 oder besser 80 – soll der „stärkere“ Würfel ermittelt werden, d. h. derjenige, der öfter gewinnt. Der „Gewinnerwürfel“ wird nun gegen einen weiteren gleichfarbigen Würfel getestet, bis alle (gleichfarbigen) Würfel „gegeneinander gespielt“ haben. Geduldige Spieler werden feststellen, dass es keinen stärksten oder schwächsten Würfel gibt, dass also jeder Würfel – je nach Gegner – Gewinner und Verlierer ist. Diese Eigenschaft nennt man „Nichttransititvität“.

Transitivität ist uns wesentlich vertrauter: Wenn Achilles schneller als Zenon rennt, und Zenon wiederum schneller als die Schildkröte, so ist auch ohne ein weiteres Wettrennen klar, dass Achilles schneller als die Schildkröte ist.

Ein weiteres Beispiel ist die Ordnung der natürlichen Zahlen:

Wenn	$x > y$
und	$y > z$,
so ist	$x > z$

Bei den Holzwürfeln findet man keine solche Beziehung. Ihre ungewöhnlich anmutenden Augenzahlen sind so ausgewählt, dass es keinen „stärksten“ Würfel gibt. So gilt für die drei (hellen) Würfel:

Würfel A ist "stärker" als Würfel B

Würfel B ist "stärker" als Würfel C

Würfel C ist "stärker" als Würfel A

Dies kann sowohl experimentell als auch durch Betrachtung der Gewinn-wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

Ein populäres Beispiel für ein nichttransitives Spiel ist „Papier-Stein-Schere“. Auch hier gibt es keinen „Gewinner“, sondern jedes Objekt kann je nach Gegner Gewinner oder Verlierer sein[4]. Es gilt:

.Papier ist „stärker“ als Stein

.Stein ist „stärker“ als Schere

.Schere ist „stärker“ als Papier

[4] Erweitert man das Spiel zu „Papier-Stein-Schere-Brunnen“, so gibt es zwei „stärkere“ Objekte, nämlich Papier und Brunnen mit einer Siegchance von 2:1, und zwei „schwächere“, Stein und Schere mit einer Siegchance von 1:2

Gewinnwahrscheinlichkeiten für die hellen Würfel

(die Würfel sind nach der jeweils höchsten Augenzahl benannt)

Würfel 6 : Würfel 5 =	5 : 4
Würfel 5 : Würfel 4 =	2 : 1
Würfel 4 : Würfel 6 =	2 : 1

Gewinnwahrscheinlichkeiten für die dunklen Würfel

(die Würfel sind nach der jeweils höchsten Augenzahl benannt)

Würfel 9 : Würfel 8 =	2 : 1
Würfel 8 : Würfel 7 =	2 : 1
Würfel 7 : Würfel 6 =	2 : 1
Würfel 6 : Würfel 9 =	2 : 1

Station 13: rumkugeln

41 Holzkugeln ∅ 3 cm

Holzrahmen

Wenn ein Obsthändler Apfelsinen in Kisten packt, kennt er die platzsparendste Variante ganz genau: Statt sie „in Reih und Glied“ zu legen, versetzt er die Reihen gegeneinander, so dass zum Schluss jede Frucht von sechs anderen umgeben ist.

Wie viel Platz lässt sich bei dieser hexagonalen Packung sparen, verglichen mit der kubischen Packung, bei der die Kugeln in einem Quadratgitter liegen?

Da bei der hexagonalen Packung die Reihen um einen halben Kugeldurchmesser versetzt sind, ergibt sich (bei gleich großen Kugeln) ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken. Der Abstand der Gitterpunkte ist – wie auch beim Quadratgitter der kubischen Packung– genau der Kugeldurchmesser.

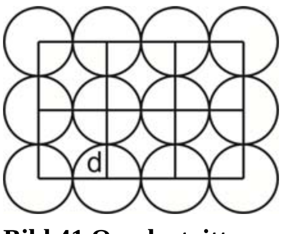


Bild 41 Quadratgitter

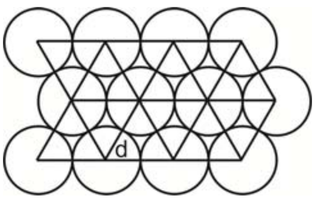
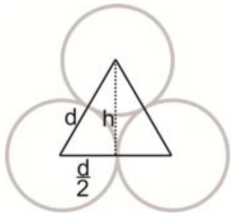


Bild 42 Dreiecksgitter

Der Reihenabstand der hexagonalen „Apfelsinenkistenpackung“ entspricht der Höhe des gleichseitigen Dreieckes, die durch den Satz des Pythagoras berechnet werden kann.



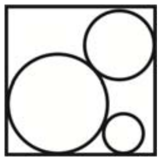
$$d^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 0{,}866d$$

Bild 43 Höhe im gleichseitigen Dreieck

Im Gegensatz zur kubischen Packung, bei der die Reihen einen Kugeldurchmesser Abstand voneinander haben, beträgt der Reihenabstand bei der hexagonalen Packung nur etwa 87 % des Kugeldurchmessers. Neun Reihen der hexagonalen Packung sind etwa so hoch (7,9 d) wie 8 Reihen der kubischen Packung (8 d), so dass bei unserer Station auch die 41. Kugel noch ihren Platz finden kann.

Und wie sieht es aus, wenn mehrere Lagen Apfelsinen in die Kiste gestapelt werden sollen? Auch hier ist die hexagonale Packung die raumsparendste Variante; 74,05 % der Kiste können mit Apfelsinen gefüllt werden. Bereits Johannes Kepler (1571–1630) nahm an, dass es keine dichtere Packung gibt; der Beweis dieser Vermutung konnte allerdings erst 1998 durch Thomas Hales erbracht werden.



Station 14: Kugellager

200 Holzkugeln ∅ 4 cm

100 Holzkugeln ∅ 7 cm

20 Holzkugeln ∅ 10 cm

Bei der Station „rumkugeln“ wurden gleiche Kugeln platzsparend verstaut. Wie sieht es nun aus, wenn Kugeln mit unterschiedlichen Durchmessern möglichst raumsparend in die Kiste gepackt werden sollen?
Tatsächlich entzieht sich dieses Problem einer einfachen mathematischen Betrachtung, so dass Ausprobieren in diesem Fall der vielversprechendere Weg ist.
Um die Ergebnisse vergleichbar zu machen, wurden den Kugeln verschiedene Punktwerte zugeordnet. Diese hier ausgewählten Punktwerte orientieren sich in etwa an der Anzahl von Kugeln einer Größe, die die Kiste komplett füllen würden.

Kugelgröße	Max. Anzahl	Punkte
4 cm	195	1
7 cm	37	6
10 cm	10	18

Station 15: Zusammengewürfelt

1 Holzpuzzle Ahorn

1 Holzpuzzle Eiche

1 Holzpuzzle Buche

1 Holzpuzzle Buche gelb lasiert

Diese Holzpuzzles sind mehr als nur anspruchsvolle Knobelspiele; in ihnen steckt zudem noch ein Stück Mathematik.

Jeder Würfel hat eine Kantenlänge von 9 cm und lässt sich in drei Würfel mit den Kantenlängen 4,5; 6 und 7,5 cm zerlegen. Die Längen lassen sich auf ganze Zahlen vereinfachen, und die Beziehungen zwischen den Würfelvolumina mit folgender Gleichung beschreiben: $3^3+4^3+5^3=6^3$

(Für alle, die es nachrechnen möchten: $27+64+125=216$)

Für eine Zerlegung des Würfels in Quader (gelbes Puzzle) sind neun Teile nötig; bislang ist keine Zerlegung bekannt, die mit weniger Elementen auskommt. Die drei unlasierten Holzpuzzles bestehen aus acht teils zusammengesetzten Teilen und sind so gestaltet, dass bei jeder Holzart ein kleinerer Würfel schon komplett ist:

Ahorn:	Dreierwürfel
Eiche:	Viererwürfel
Buche:	Fünferwürfel

Aus den übrigen Teilen lassen sich dann noch jeweils zwei weitere Würfel zusammensetzen, so dass obige Gleichung „begreifbar“ gemacht wird. Gibt es noch andere Zahlen, deren dritte Potenz ebenfalls die Summe dreier Kubikzahlen ist? Zunächst kann man die Würfel einfach doppelt oder dreifach groß bauen und kommt somit zu Verhältnissen wie

$6^3+8^3+10^3=12^3$ oder

$9^3+12^3+15^3=18^3$.

Der französische Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) fand einen Weg, die diophantische Gleichung $x^3+y^3+z^3=w^3$ zu lösen und damit weitere Lösungen, z.B. $1^3+6^3+8^3=9^3$. Auch wenn die „Mathematik“ also schon knapp 200 Jahre bekannt war, sind die Veranschaulichungen in Form der Würfelpuzzles allesamt wesentlich jünger. Der britische Mathematiker Herbert William Richmond präsentierte 1943 eine Würfelzerlegung aus 12 Teilen. Sechs Jahre später, angeregt durch einen Wettbewerbsaufruf in der mathematischen Zeitung der Universität Cambridge, lieferten Studenten innerhalb nur eines Jahres Lösungen, die mit acht bzw. neun Teilen auskamen und den hier gezeigten Puzzles zugrunde liegen.

Weiterführende Literatur:

G. N. Frederickson. Dissections: Plane & Fancy. Cambridge University Press, 2003

Bild 44 Puzzle „9 Quader“ (gelb lasiert)

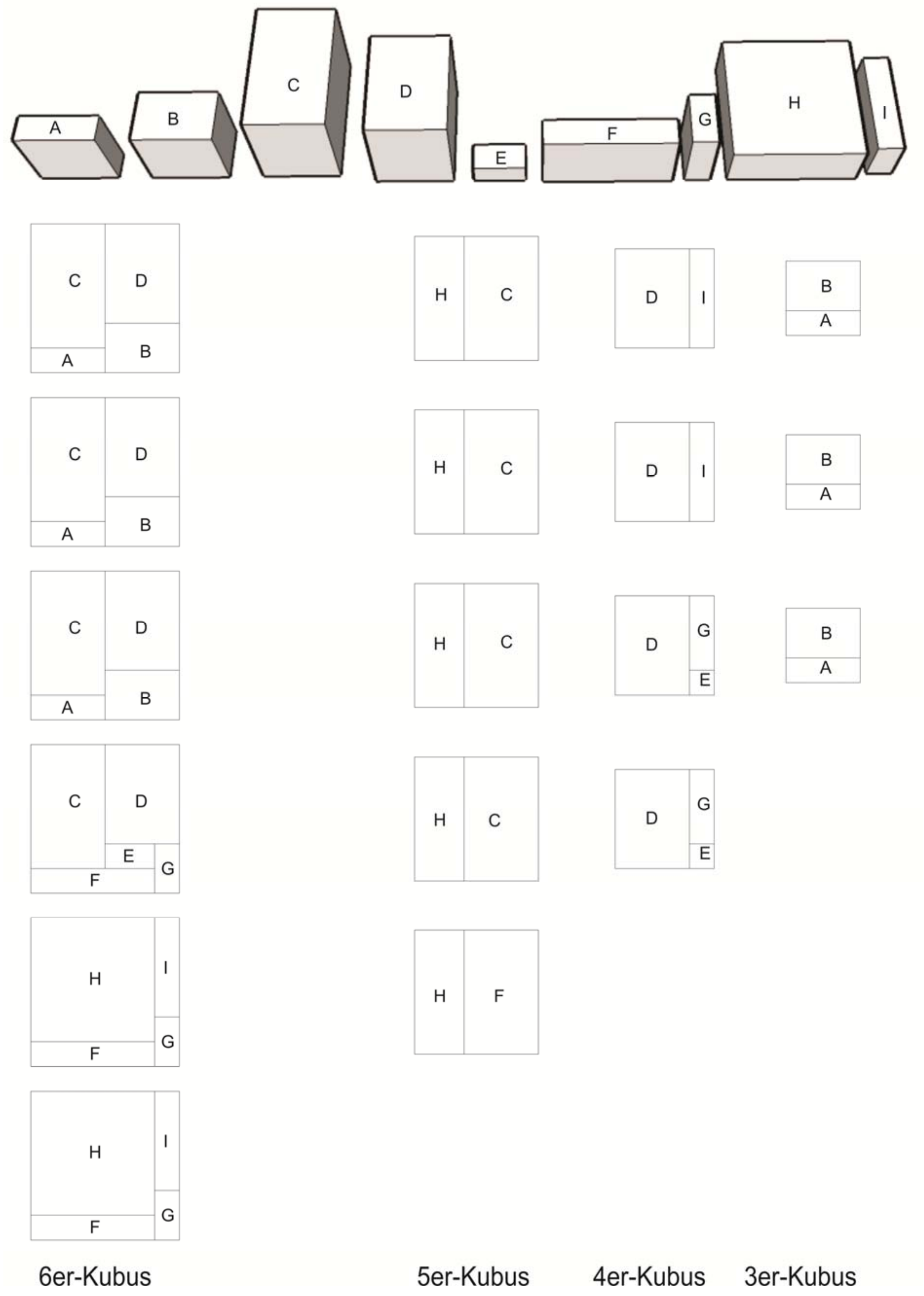


Bild 45 Puzzle „Dreierwürfel“ (Ahorn)

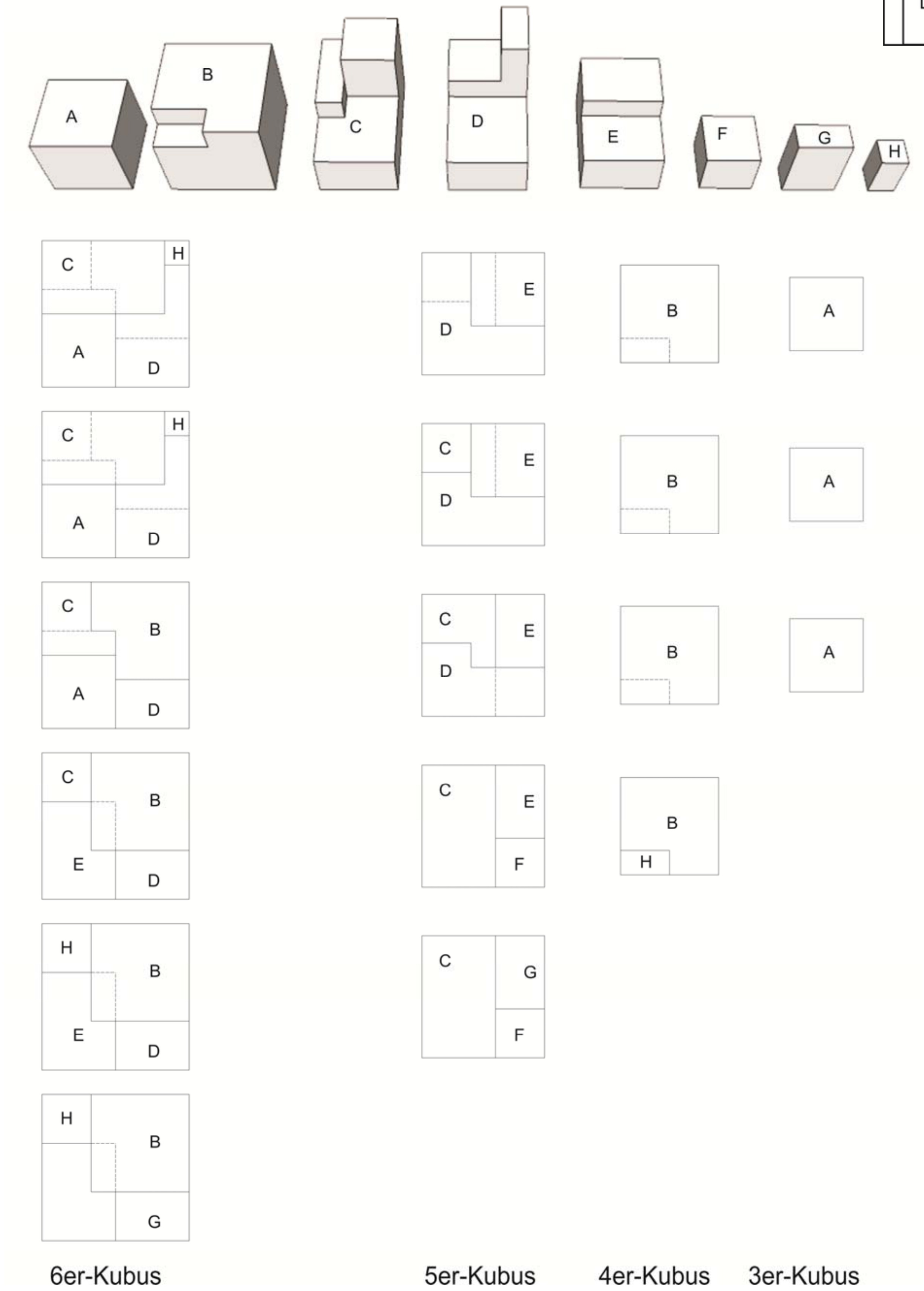


Bild 46 Puzzle „Viererwürfel“ (Eiche)

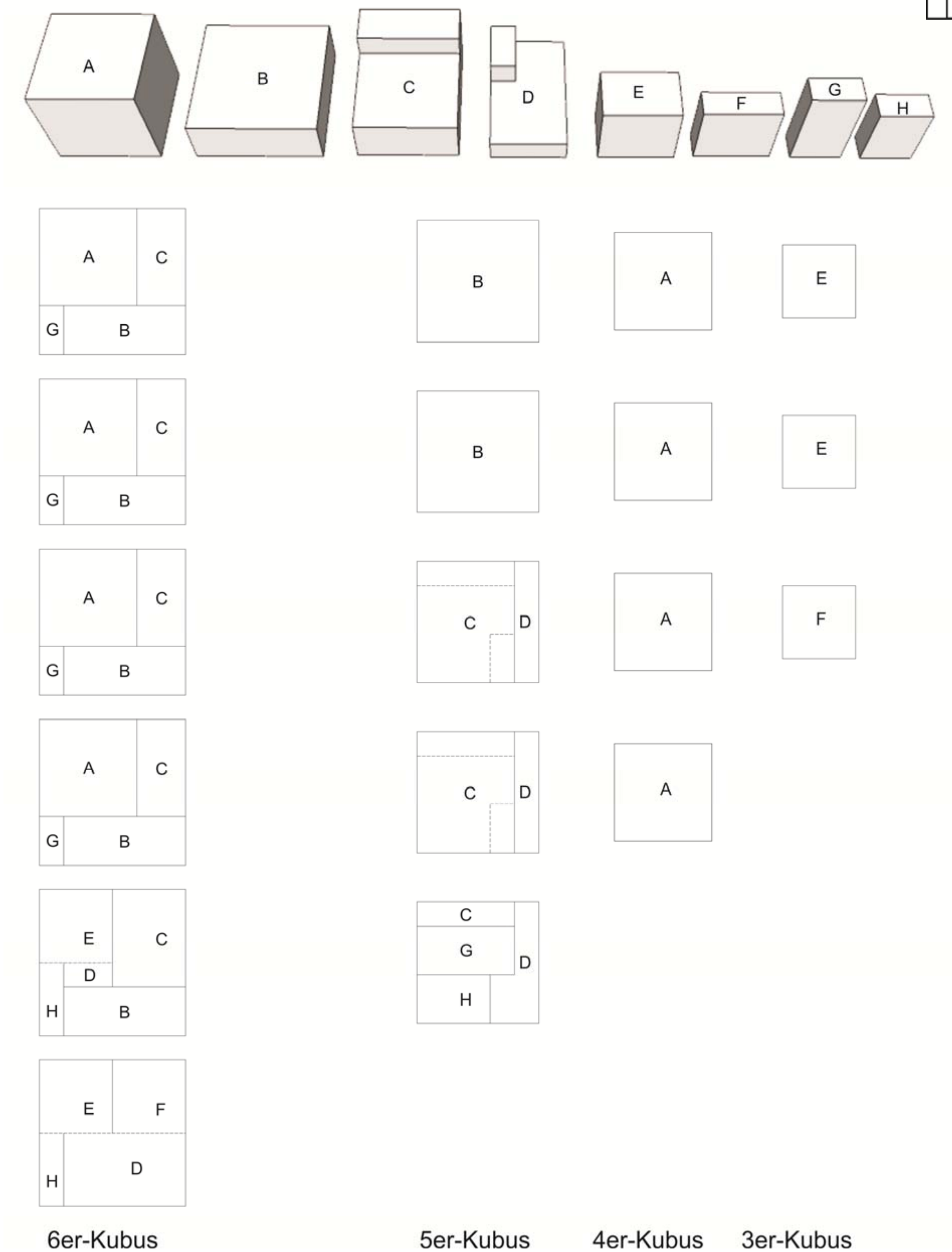
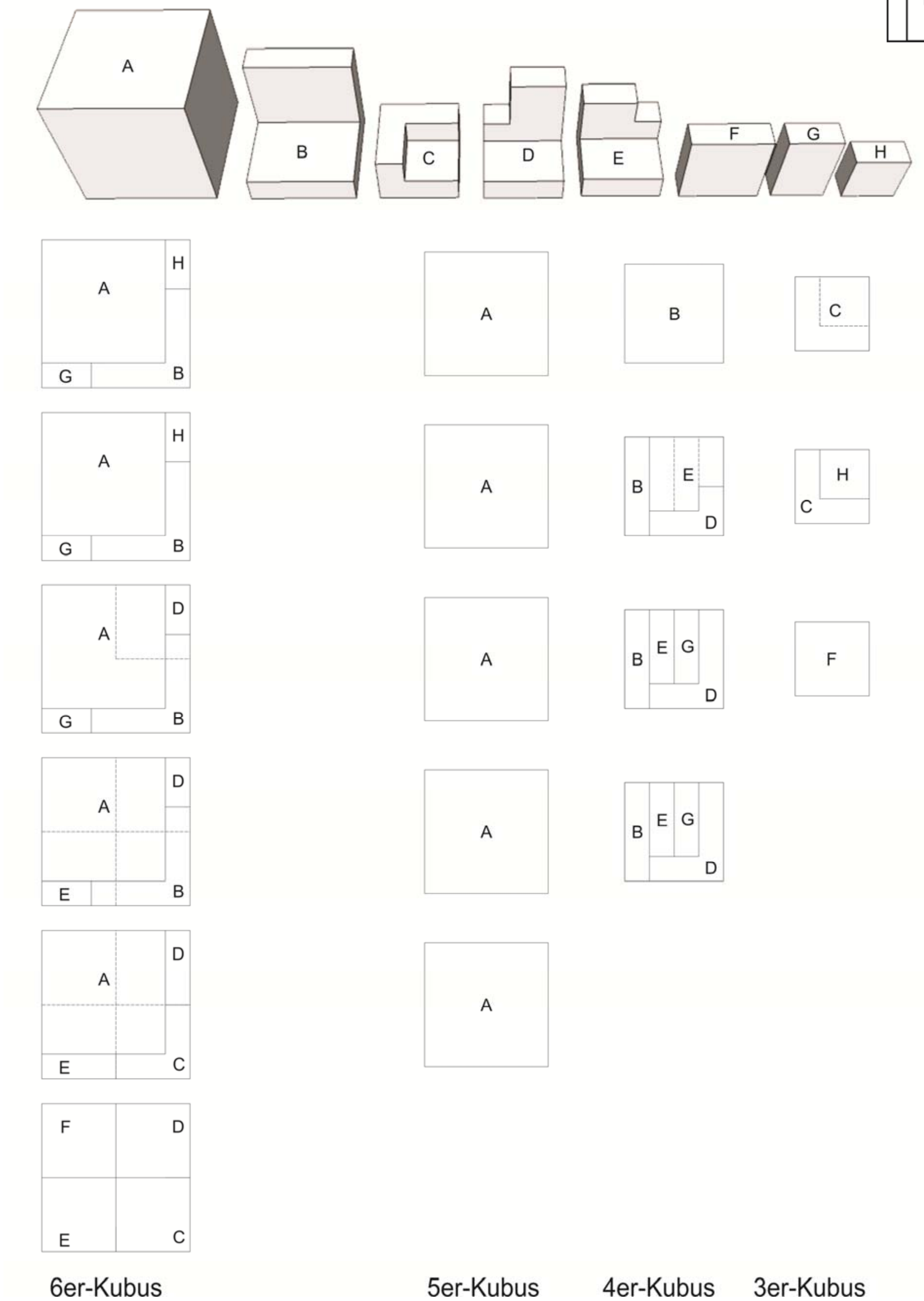


Bild 47 Puzzle „Fünferwürfel“ (Buche)



Station 16: Pfeile und Drachen

Um eine Fläche lückenlos mit Kacheln zu bedecken, muss man die Kachelform sorgfältig auswählen. Quadratische oder rechteckige Fliesen sind recht geläufig, aber auch gleichseitige Dreiecke oder Sechsecke können ohne Zwischenraum z.B. zu einem Bienenwabenmuster aneinander gefügt werden. All diese Flächenfüllungen –oder Parkettierungen – sind periodisch, d.h. das Muster kann durch wiederholtes Anlegen immer gleicher Teilstücke (dem sog. Rapport) vergrößert werden.
Auch mit den Pfeilen und Drachen kann periodisch parkettiert werden: Beide Elemente ergeben zusammen Rhomben, die zu einem sich wiederholenden Muster gelegt werden können.

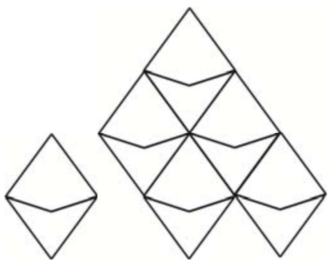


Bild 48 Periodische Kachelung

Anders ist es, wenn zunächst fünf Drachen oder Pfeile zu einer „Sonne“ oder „Stern“ genannten Figur gelegt werden, die dann den Anfang für die weitere Flächenfüllung bildet.

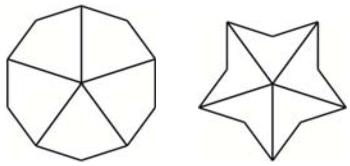


Bild 49 „Sun“ und „Star“

Eine periodische Kachelung ist nicht zu finden, doch lassen sich sehr schöne rotationssymmetrische Muster legen, die an arabische Ornamentik erinnern.
Bei den Ausgangsfiguren in Bild 50 ist eine rotationssymmetrische Kachelung ebenfalls möglich, wenn ein freiliegender Drachen zuerst zu einem Stern ergänzt wird.

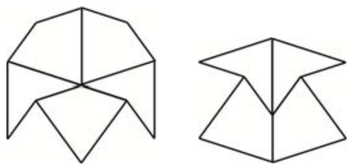


Bild 50 „Jack“ und „Deuce“

Noch schwieriger wird es, wenn man zunächst völlig frei beginnt oder eine dieser Figuren als Anfang wählt:

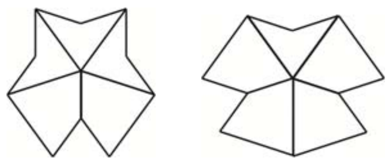


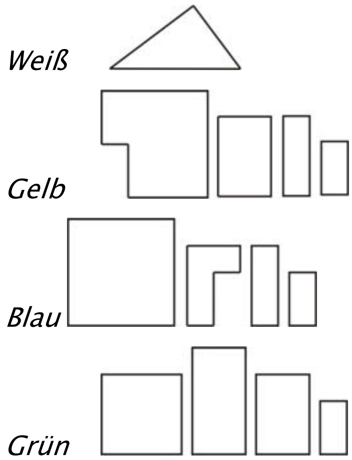
Bild 51 „King“ und „Queen“

Möglicherweise kommt man immer wieder an Stellen, wo plötzlich kein Teil mehr passen will und das Puzzle zurückgebaut und anders gelegt werden muss –der Alptraum für jeden Fliesenleger! Es ist nicht möglich, das Parkett durch einfache Wiederholung eines schon bestehenden Musters zu erweitern – die Parkettierung ist aperiodisch.

Die Figuren aus Bild 49, Bild 50 und Bild 51 sind übrigens immer wieder in solch einer aperiodischen Parkettierung zu finden, wenn diese nur genügend groß ist.

„Pfeile und Drachen“ sowie eine ganze Reihe von weiteren Kachelformen wurden in den 1970er Jahren von Roger Penrose und Robert Ammann entdeckt. Sogenannte „Penrose-Muster“ haben alle eine fünfzählige Symmetrie und werden quasiperiodisch genannt, da sich in ihnen zwar bestimmte Muster wiederholen, allerdings nicht in regelmäßigen Abständen.

Station 17: Pythagoras‘ Puzzle



Eine der bekanntesten Formeln der Schulmathematik ist der Satz des Pythagoras. Auch wer seine Schulzeit schon lange hinter sich gelassen hat, dürfte sich zumindest noch an seine mathematische Darstellung erinnern:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diese Gleichung beschreibt einen der fundamentalen Sätze der Euklidischen Geometrie, der nicht nur im antiken Griechenland, sondern schon weit vorher in indischen und babylonischen Kulturen bekannt war. Es gibt zahlreiche mathematische Beweise für diesen Satz; allerdings ist umstritten, ob Pythagoras von Samos tatsächlich der Erste war, dem ein solcher Beweis gelang.
Das Holzpuzzle zeigt drei verschiedene geometrische Beweise und veranschaulicht zugleich, was die abstrakte Formel eigentlich bedeutet. Jedes Holzpuzzle kann entweder zu zwei kleinen oder einem großen Quadrat gelegt werden, d.h. die Flächeninhalte der beiden kleinen Quadrate (mit jeweils einer kurzen Dreieckseite als Kantenlänge) sind zusammen genau so groß wie der Flächeninhalt des großen Quadrats, wie hier am Beispiel des gelben Puzzles gezeigt wird:

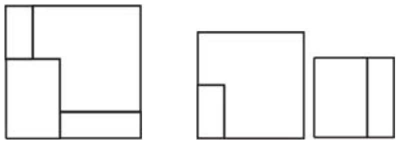


Bild 52: Gelbes Puzzle

Dieser Zusammenhang gilt für jedes rechtwinklige Dreieck (s. Bild 53) und lässt sich in Worten so formulieren:

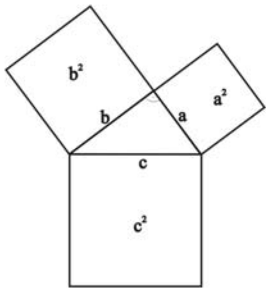
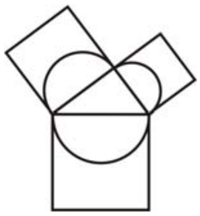


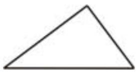
Bild 53: Quadrate der Seitenflächen des rechtwinkligen Dreiecks

Satz des Pythagoras *Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate (d.h. der Quadrate, die eine kurze Dreieckseite als Kantenlänge haben) genauso groß wie der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrat (d.h. des Quadrates der langen Dreiecksseite).*



Station 18:
Möndchen des Hippokrates

Weiß



Hellrot

Dunkelrot

Das Wort „Geometrie“ bedeutet „Erdmaß“; und tatsächlich ergaben sich die frühesten geometrischen Erkenntnisse aus ganz praktischen Problemen: Flurgrenzen bestimmen, Feldflächen und Grundrisse berechnen. Darüber hinaus entwickelte sich jedoch das Interesse an grundsätzlichen mathematischen Fragestellungen, und eine der ältesten ist die Frage nach der Quadratur des Kreises, d.h. die Suche nach einer Möglichkeit, zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren. Hippokrates von Chios glaubte sich der Lösung sehr nahe, als er seine „Möndchen“ beschrieb, und seine Überlegungen wurden für diese mathimagie-Station aufgegriffen.
Hippokrates zeichnete zunächst ein rechtwinkliges Dreieck und konstruierte dann über jeder Dreiecksseite einen Halbkreis. Der Halbkreis über der langen Seite teilt dabei die kleineren Halbkreise, so dass zwei „Möndchen“ entstehen.

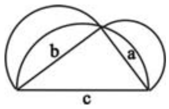


Bild 54: Möndchen des Hippokrates

Weiterhin griff Hippokrates auf den ihm schon bekannten Satz des Pythagoras (der nicht nur für Quadrate, sondern alle ähnlichen Flächen gilt) zurück und zeigte so, dass die Summe der Halbkreisflächen über den kurzen Seiten gleich Halbkreisfläche über der langen Seite ist (Bild 55). Zum Nachrechnen sei auf die Formel für den Flächeninhalt eines Halbkreises verwiesen: $A = \frac{\pi}{8} d^2$

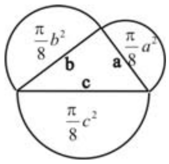


Bild 55: Halbkreise über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks

In Bild 56 ist zu sehen, dass die Fläche der Möndchen genau so groß ist wie die Fläche des Dreiecks.

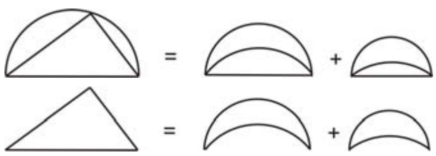


Bild 56: Kreissegmente und Möndchen

So gelang es Hippokrates als Erstem, den Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten Fläche durch ein Dreieck darzustellen. Die Quadratur des Kreises löste er gleichwohl nicht.
Erst 1882 zeigte der Mathematiker Ferdinand von Lindemann, dass dieses Problem mit Zirkel und Lineal prinzipiell nicht lösbar ist.

mathimagie

An dieser Ausstellung arbeiteten mit:

Idee:	Hartmut Menzer
Konzept:	Hartmut Menzer, Carsten Müller, Christina Walther
Handwerk:	Jörg Berger, Carmen Rose, Anja Kornhaas,
	Christof Götz, Matthias Richter, Steffen Schauroth
Gute Hinweise:	Michael Fothe, Peter Fauser
Wort und Bild:	Christina Walther

Dateiname: handbuch2s_2011.doc
Verzeichnis: D:
Vorlage: C:\Dokumente und Einstellungen\christina.IMAGINATA\Anwendungsdaten\Microsoft\Vorlagen\lucida.dot
Titel:
Thema:
Autor: christina
Stichwörter:
Kommentar:
Erstelldatum: 19.05.2011 09:38:00
Änderung Nummer: 10
Letztes Speicherdatum: 30.05.2011 09:58:00
Zuletzt gespeichert von: Christina Walther
Letztes Druckdatum: 10.04.2013 09:52:00
Nach letztem vollständigen Druck
Anzahl Seiten: 45
Anzahl Wörter: 5.270 (ca.)
Anzahl Zeichen: 33.205 (ca.)